ESSAIM

CONCOURS 2005

Épreuve de mathématiques

Avis aux candidats

- Aucun document n'est autorisé.
- La calculatrice est interdite.
- Le problème et les deux exercices sont indépendants.
- Le sujet comporte six pages.

On attachera la plus grande importance à la qualité de la rédaction.

Durée: 3 heures

Session du 20 mai 2005

1 Exercice 1

Soit E l'espace euclidien de dimension 3 muni de la base orthonormale directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère un vecteur $e = ae_1 + be_2 + ce_3$, non nul, et l'application φ_e de E dans E définie sur tout vecteur u de E par :

$$\varphi_e(u) = u + e \wedge u$$

1.1

Montrer que φ_e est un endomorphisme de E et donner sa matrice M_e relativement à la base $\mathcal{B}$.

1.2

Montrer que 1 est la seule valeur propre réelle et donner son sous-espace propre associé.

1.3

La matrice M_e est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? Est-elle inversible ? Quel est le rang de M_e ?

1.4

On pose $e'_1 = \left(\frac{1}{||e||}\right) e$ et on considère une base orthonormée directe $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$

On ne demande pas d'expliciter les vecteurs e'_2 et e'_3.

1.4.1

Donner la matrice A de φ_e relativement à $\mathcal{B}'$ et calculer son déterminant. En déduire le déterminant de M_e en fonction de $||e||$.

1.4.2

On suppose maintenant que $e = e_1$. Résoudre l'équation : $u + u \wedge e_1 = f$ où $f = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$ est donné et u est le vecteur inconnu $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$.

2 Exercice 2

On note, pour un entier naturel n, $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré au plus n.

2.1

On suppose dans cette question que $n = 2$. On considère trois réels a, b, c, distincts deux à deux et on définit l'application φ de $\mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(P, Q) = P(a)Q(a) + P(b)Q(b) + P(c)Q(c)$$

2.1.1

Montrer que φ est un produit scalaire.

2.1.2

On définit les trois polynômes P_1, P_2 et P_3 par :

$$P_1(X) = \frac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)} \quad P_2(X) = \frac{(X-a)(X-c)}{(b-a)(b-c)} \quad \text{et} \quad P_3(X) = \frac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)}$$

Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$.

2.2

On revient au cas n quelconque, on considère $n+1$ réels deux à deux distincts, a_0, $a_1, \ldots, a_n$ et on définit φ sur $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\varphi(P, Q) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i)$$

2.2.1

Montrer que φ est un produit scalaire.

2.2.2

On définit les $n+1$ polynômes P_j, pour $0 \leq j \leq n$, par :

$$P_j(X) = \prod_{\substack{0 \leq i \leq n \\ i \neq j}} \frac{X - a_i}{a_j - a_i}$$

Calculer $P_j(a_k)$ pour tous les entiers k et j compris entre 0 et n.

2.2.3

Montrer que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.

3 Problème

3.1 Étude d'une fonction

On considère la fonction φ définie sur l'intervalle $I = [1; +\infty[$ par :

$$\varphi(t) = \left(t + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)$$

3.1.1

Calculer les dérivées première et seconde $\varphi'(t)$ et $\varphi''(t)$.

3.1.2

Déterminer :

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi'(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} \varphi(t)$$

3.1.3

Montrer que :

$$\forall t \in I\,, \quad \varphi'(t) \leq 0$$

3.1.4

En déduire que :

$$\forall t \in I\,, \quad \varphi(t) \geq 1$$

3.1.5

Donner, sous la forme $\dfrac{a}{t^\alpha}$, un équivalent de $\varphi(t) - 1$ au voisinage de $+\infty$.

3.2 Formules de Wallis

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)dt$$

3.2.1

Calculer u_0, u_1 et u_2.

3.2.2

Montre que la suite (u_n) est décroissante puis qu'elle converge vers une limite que l'on notera ℓ.

3.2.3

Établir une relation de récurrence, pour $n \geq 2$, entre u_n et u_{n-2}.

3.2.4

En déduire une expression, sous forme de produits, de u_{2n} et de u_{2n+1}. On donnera ensuite une expression de ces termes à l'aide de factorielles, de puissances de 2 et du nombre π.

3.2.5

Montrer que, pour n :

$$u_{2n} \cdot u_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)}$$

3.2.6

En déduire la valeur de ℓ.

3.2.7

En utilisant le fait que la suite (u_n) est décroissante, montrer que :
lorsque $n \to +\infty$

$$u_{2n} \sim u_{2n+1}$$

3.2.8

Établir, à l'aide des questions précédentes, les formules (de Wallis) :
lorsque $n \to +\infty$

$$u_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

et

$$\sqrt{\pi} \sim \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}$$

3.2.9 Application

On considère la série entière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n$$

On rappelle que les coefficients binômiaux sont définis, pour les entiers tels que $0 \leq k \leq n$, par la formule :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- a. Calculer le rayon R de cette série entière.
- b. Déterminer la nature de la série

$$\sum \binom{2n}{n} R^n$$

- c. Déterminer la nature de la série

$$\sum \binom{2n}{n} (-R)^n$$

3.3 Formule de Stirling

On considère à présent la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{n!\, e^n}{n^n \sqrt{n}}$$

3.3.1

Exprimer $\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ à l'aide de la fonction φ étudiée aux questions 3.1.

3.3.2

En déduire la convergence de la série

$$\sum \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$$

3.3.3

Après avoir établi que, pour $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{v_{k+1}}{v_k}\right) = \ln(v_{n+1}) - 1$$

montrer que la suite (v_n) converge vers une limite positive non nulle C.

3.3.4

En déduire un équivalent, lorsque $n \to +\infty$, de $n!$ en fonction de puissances de n, de l'exponentielle et de C.

3.3.5

À l'aide de la deuxième formule de Wallis calculer C en fonction de π.

3.3.6

En déduire la formule de Stirling :

$$\text{lorsque } n \to +\infty\,, \quad n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$